

Control 5

P1. Sea $(G, *)$ un grupo con elemento neutro e . Se define en $G \times G$ la ley de composición interna Δ como:

$$(a, b)\Delta(c, d) = (a * c, b * d), \forall (a, b), (c, d) \in G \times G.$$

- (i) (3,0 pts.) Pruebe que $(G \times G, \Delta)$ es grupo.
- (ii) (2,0 pts.) Suponga ahora que $(G, *)$ es grupo abeliano y considere la función $\varphi : G \times G \rightarrow G$ definida por $\varphi((a, b)) = (a * b)^{-1}$, $\forall (a, b) \in G \times G$. Demuestre que φ es un homomorfismo de $(G \times G, \Delta)$ en $(G, *)$.
- (iii) (1,0 pts.) ¿Es φ un isomorfismo? Justifique.

P2. a) (3,0 pts.) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G . Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k / h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

- b) (3,0 pts.) Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}$, $a^3 \neq e$ ($a^3 = a * a * a$).

Indicación: Argumente por contradicción y use el Teorema de Lagrange.

30 de mayo de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:15 hrs.